التمرين 1 (4 ن)

اجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة من الحالات التالية:

1) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0\ ,\ +\infty[$ كما يلي : $f(x)=2x+ln(\frac{x+1}{2x})$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=2x$.

2) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=3x+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ هي دالة زوجية.

3) للمعادلة $2\,ln(x)-ln(5x-6)=0$ حلان متمايزان هما 3 و 2.

4) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب $u_n=-3\,(\frac{1}{4})^n$ هي متتالية متزايدة.

التمرين 2 (4 ن)

يحتوي وعاء على 3 قريصات بيضاء و 4 حمراء ، إحدى القريصات البيضاء تحمل الرقم 1 والأخريان تحملان الرقم 5 أما القريصات الحمراء فإثنتان منهما تحملان الرقم 2 و الأخريان تحملان الرقم 3 .

نسحب عشوائيا من هذا الوعاء قريصتين في آن واحد .

نعتبر الحادثتين A و B حيث :

A " مجموع الرقمين المسحوبين أكبر تماما من 6 ".

B " الحصول على القريصتين بيضاوين ".

1) أحسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمال A و B على الترتيب.

2) ماهو احتمال أن يكون مجموع الرقمين المسحوبين أكبر تماما من 6 علما أن القريصتين بيضاويتين ؟

3) نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب قريصتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما .

أ)عين قيم المتغير العشوائي X .

ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ج) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ ، ثم أحسب الإنحراف المعياري $\sigma\ (X)$.

التمرين 3 (5 ن)

I) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{2u_n} \end{cases}$$

1) أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة ، و عين نهايتها.

2) أ) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}\ (u_n - 1)$

ب) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n. $0 < u_{n+1} - 1 \leq (\frac{1}{2})^n$

II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \dfrac{u_n - 1}{2u_n - 1}$

ا) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

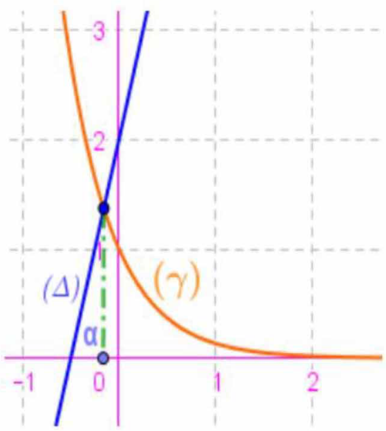
ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج) احسب بدلالة n المجموع L_n حيث : $L_n = \dfrac{V_0 - 1}{u_0} + \dfrac{V_1 - 1}{u_1} + \cdots + \dfrac{V_n - 1}{u_n}$

التمرين 4 (7 ن)

I) الشكل التالي هو التمثيل البياني (γ) للدالة $x \to e^{-2x}$
و المستقيم (Δ) ذو المعادلة

$y=4x+2$ ، α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ).



الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x) = e^{-2x} - 4x - 2$

1) بقراءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) .

ثم استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x .

2) تحقق أن $-0.16 < \alpha < -0.15$

Nafouz

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + 3 -2\,xe^{2x}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^{2x}\,g(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ- أثبت أن المستقيم (d) الذي معادلته $y = x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (d) .

4) بين أن : $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2+6\alpha+3}{2\alpha+1}$

5) ارسم (C_f) و (d). (نأخذ $f(\alpha) = 3.07$)

6) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (d) يُطلب تعيين معادلته.

7) عين بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين.

أ) x عدد حقيقي ، باستعمال التكامل بالتجزئة احسب : $\int_0^x 2te^{2t}dt$

ب) λ عدد حقيقي اصغر تماما من 0 ، احسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات المعادلات : $x=0$ ، $x=\lambda$ و $y=x+3$

التنقيط	الحل	رقم التمرين
1 ن 1 ن 1 ن 1 ن	1) الدالة f المعرفة على $]0\ ,\ +\infty[$ كما يلي : $f(x)=2x+ln(\frac{x+1}{2x})$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=2x$. **خطأ** 2) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=3x+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ هي دالة زوجية. **خطأ بل دالة فردية** 3) للمعادلة $2\ ln(x)-ln(5x-6)=0$ حلان متمايزان هما 3 و 2. **صحيح** 4)المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب $u_n=-3\ (\frac{1}{4})^n$ هي متتالية متزايدة **صحيح**	**التمرين 1**

التمرين 2	عدد الحالات الممكنة هي : $C_7^2 = 21$ 1) احتمال أن يكون هذا المجموع أكبر تماما من 6 هو : $P(A) = \frac{9}{21}$ $P(B)=\frac{3}{21}$ 2) احتمال أن يكون المجموع أكبر تماما من 6 علما أن القريصتين بيضاوين : $P(C) = \frac{1}{21}$ 3)ا) تعيين قيم المتغير العشوائي: $X = \{3,4,5,6,7,8,10\}$ ب) قانون الاحتمال للمتغير العشوائي : $P(X = 3) = \frac{C_1^1 \times C_2^1}{21} = \frac{2}{21}$ $P(X = 4) = \frac{C_2^2 + C_1^1 \times C_2^1 + C_1^1 \times C_2^1}{21} = \frac{3}{21}$ $P(X = 5) = \frac{4}{21}$ $P(X = 6) = \frac{3}{21}$ $P(X = 7) = \frac{4}{21}$ $P(X = 8) = \frac{4}{21}$ $P(X = 10) = \frac{C_2^2}{21} = \frac{1}{21}$	0.5 ن 0.5 ن 0.5 ن 0.75 ن 0.5 ن 0.75 ن

0.5 ن

$X = x_i$	3	4	5	6	7	8	10	$\sum$
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{21}$	1

0.5 ن

ج) حساب الأمل الرياضي :

$$E(X) = \left(3 \times \frac{2}{21}\right) + \left(4 \times \frac{3}{21}\right) + \left(5 \times \frac{4}{21}\right) + \left(6 \times \frac{3}{21}\right) + \left(7 \times \frac{4}{21}\right) + \left(8 \times \frac{4}{21}\right) + \left(10 \times \frac{1}{21}\right) \cong 5.67$$

0.5 ن

حساب التباين والانحراف المعياري :

$V(X) = 7.18$

الانحراف المعياري

$\sigma(X) = \sqrt{v} = 2.68$

التمرين 3

1) ا)

0.5 ن

نسمي $p(n)$ الخاصية : $u_n > 1$

① من أجل $n = 0$: لدينا $u_0 = 2$ و $2 > 1$ إذن $u_0 > 1$

ومنه $p(0)$ صحيحة

② نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أي $u_n > 1$ ونبرهن على أن $p(n+1)$ صحيحة أي : $u_{n+1} > 1$

لدينا $u_n > 1$ ومنه $u_n + 2u_n > 1 + 2u_n$

وبالتالي $3u_n - 1 > 2u_n$ ومنه $\frac{3u_n - 1}{2u_n} > 1$

إذن $u_{n+1} > 1$ أي أن $p(n+1)$ صحيحة

اذن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

ب)	ندرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n-1}{2u_n}-u_n=\frac{-2u_n^2+3u_n-1}{2u_n}$$ $$=\frac{(-2u_n+1)(u_n-1)}{2u_n}$$ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $u_n>1$ ومنه $u_n-1>0........(1)$ و $-2u_n<-2$ ومنه $-2u_n+1<-1$ أي أن $-2u_n+1<0........(2)$ وكذلك $2u_n>0........(3)$ من (1) و (2) و (3) نستنتج أن $\frac{(-2u_n+1)(u_n-1)}{2u_n}<0$ أي $u_{n+1}-u_n<0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ بماأن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأسفل بـ 1 فإن (u_n) متقاربة.	0.5 ن
2) ا)	$u_{n+1}-1\leq\frac{1}{2}(u_n-1)$: من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $$u_{n+1}-1=\frac{3u_n-1}{2u_n}-1=\frac{u_n-1}{2u_n}=\frac{1}{2u_n}(u_n-1)$$ ولدينا $u_n>1$ ومنه $2u_n>2$ إذن $\frac{1}{2u_n}<\frac{1}{2}$ بضرب الطرفين في العدد الموجب (u_n-1) نحصل على $\frac{1}{2u_n}(u_n-1)<\frac{1}{2}(u_n-1)$ ومنه $u_{n+1}-1\leq\frac{1}{2}(u_n-1)$	0.25 ن 0.75 ن

ب)	من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $0 < u_{n+1} - 1 \le \frac{1}{2}(u_n - 1)$ ومنه $0 < u_1 - 1 \le \frac{1}{2}(u_0 - 1)$ $0 < u_2 - 1 \le \frac{1}{2}(u_1 - 1)$ $0 < u_3 - 1 \le \frac{1}{2}(u_2 - 1)$ .... $0 < u_n - 1 \le \frac{1}{2}(u_{n-1} - 1)$ بضرب أطراف هذة المتباينات طرفا لطرف نجد : $0 < u_n - 1 \le \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - 1)$ وبماأن $u_0 - 1 = 1$ فإن $0 < u_n - 1 \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (طريقة 2 : يمكن إستعمال طريقة البرهان بالتراجع)	0.5 ن
3)	$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{2u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1}{2\frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1} = \frac{3u_n - 1 - 2u_n}{6u_n - 2 - 2u_n}$ $= \frac{u_n - 1}{4u_n - 2} = \frac{1}{2} \times \frac{u_n - 1}{2u_n - 1} = \frac{1}{2} v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{3}$ ب. كتابة عبارة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 q^n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ كتابة عبارة u_n بدلالة n : لدينا $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$ ومنه $2\, v_n u_n - v_n = u_n - 1$ إذن $(2v_n - 1)u_n = v_n - 1$ ومنه $u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$ إذن $u_n = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{2\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3}{2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3}$	0.5 ن 0.5 ن

جـ. حساب بدلالة n المجموع L_n حيث :

$$L_n=\frac{v_0-1}{u_0}+\frac{v_1-1}{u_1}+\frac{v_2-1}{u_2}+\dots\dots+\frac{v_n-1}{u_n}$$

من أجل كل عدد طبيعي n : لدينا $u_n=\frac{v_n-1}{2v_n-1}$ ومنه

$\frac{v_n-1}{u_n}=2v_n-1$ إذن

$$L_n=(2v_0-1)+(2v_1-1)+(2v_2-1)+\dots\dots+(2v_n-1)$$
$$=2(v_0+v_1+\dots\dots v_n)-(1+1+1\dots\dots+1)$$
$$=2v_0\frac{1-q^n}{1-q}-(n+1)=\frac{2}{3}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-n-1$$
$$=-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}-n$$

0.5 ن

التمرين 4

1) بقراءة بيانية نحدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) .

0.5 ن

(γ) يقع فوق (Δ) على المجال $]-\infty;\alpha[$ و تحت (Δ) على $]\alpha;+\infty[$ و (γ) يقطع (Δ) في النقطة A ذات الفاصلة α

استنتاج اشارة $g(x)$ حسب قيم x .

0.5 ن

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

0.25 ن

2) التحقق أن $-0.16<\alpha<-0.15$

لدينا: $g(-0.16)\cdot g(-0.15)=0.017\times(-0.05)<0$

ومنه $-0.16<\alpha<-0.15$.

1) حساب النهايات

0.75 ن

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+3-2x\,e^{2x}\right)=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{3}{x}-2e^{2x}\right)=\boxed{-\infty}$$

2) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^{2x}g(x)$ و استنتاج اتجاه تغير الدالة f و تشكيل جدول التغيرات

$f'(x)=e^{2x}g(x)$ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

0.75 ن

$$f'(x)=1-2e^{2x}-4x\,e^{2x}=e^{2x}\left(e^{-2x}-4x-2\right)=\boxed{e^{2x}g(x)}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ إذن :

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$

ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

جدول التغيرات

0.5 ن

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

3) أ) أثبت أن المستقيم (d) الذي معادلته $y=x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f)

لدينا $\lim_{x\to-\infty}\left(-2x\,e^{2x}\right)=0$ و منه المستقيم (D) ذو المعادلة

$y=x+3$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

0.5 ن

الوضع النسبي

لدينا $\left[f(x)-(x+3)\right]=-2\,x\,e^{2x}$ و منه إشارة الفرق $\left[f(x)-(x+3)\right]$ هي عكس إشارة x إذن (C_f) يقع تحت (D) على المجال $]0;+\infty[$ و فوق (D) على المجال $]-\infty;0[$

و (C_f) يقطع (D) في النقطة ذات الإحداثيات $(0;3)$.

0.5 ن

4) نبين أن $f(\alpha)=\frac{2\alpha^2+6\alpha+3}{2\alpha+1}$

لدينا $g(\alpha)=0$ **معناه:** $e^{-2\alpha}-4\alpha-2=0$ **أي:**

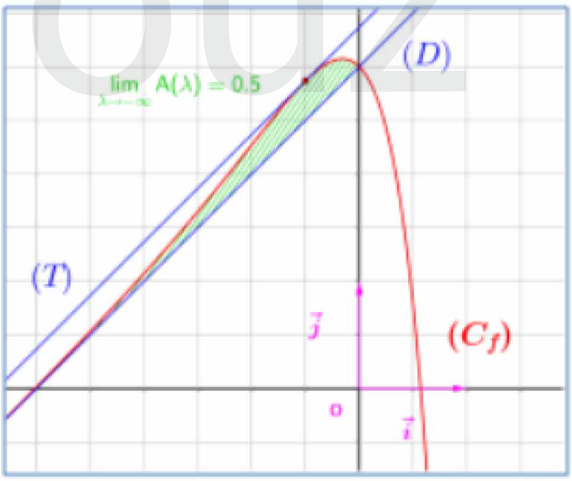
$e^{2\alpha}=\frac{1}{4\alpha+2}$ **نعوض في عبارة** f **فنجد:**

$$f(\alpha)=\alpha+3-2\,\alpha\times\frac{1}{4\alpha+2}$$

0.5 ن

$$=\alpha+3-\alpha\times\frac{1}{2\alpha+1}=\boxed{\frac{2\alpha^2+6\alpha+3}{2\alpha+1}}$$

5) رسم (C_f) و (d)



0.5 ن

6) نبين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (d) يُطلب تعيين معادلته.

لدينا $f'(x)=1$ تكافئ $-2\ e^{2x}-4\,x\,e^{2x}=0$ أي أن

$-2e^{2x}(2x+1)=0$ ومنه $2x+1=0$ إذن $x=\frac{-1}{2}$.

ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (D) عند النقطة

0.5 ن ذات الفاصلة $\frac{-1}{2}$ معادلته $\boxed{y=x+3+\frac{1}{e}}$.

7) تعيين بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين

يكون للمعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين إذا و فقط إذا كان $3<m<3+\frac{1}{e}$

أ) x عدد حقيقي ، باستعمال التكامل بالتجزئة

0.25 ن نضع $u(t)=t$ ، $v'(t)=2e^{2t}$

و منه $u'(t)=1$ ، $v(t)=e^{2t}$ إذن

$$\int_0^x 2te^{2t}dt=[u(t)v(t)]_0^x-\int_0^x u'(t)v(t)\,dt$$

0.5 ن

$$=[te^{2t}]_0^x-\int_0^x e^{2t}\,dt=xe^{2x}-\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^x$$

$$=xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}$$

ب) λ عدد حقيقي اصغر تماما من 0 ، حساب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز

المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات المعادلات : $x=0$ ، $x=\lambda$

	و $y = x + 3$ $$A(\lambda)=\int_{\lambda}^{0}\left(f(x)-(x+3)\right)dx=\int_{0}^{\lambda}2xe^{2x}dx$$ $$=\left[xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}\right]_{0}^{\lambda}=\left(\lambda e^{2\lambda}-\frac{1}{2}e^{2\lambda}+\frac{1}{2}\right)ua$$ ومنه : $$\lim_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)=\lim_{\lambda\to-\infty}\left(\lambda e^{2\lambda}-\frac{1}{2}e^{2\lambda}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\,ua$$	0.5 ن	